

βР2. КОНСТАНТИ НА ООРТ И ВОДОРОДНА ЛИНИЯ

Условие. Движението на звездите в спиралните галактики като Млечния път може с малка грешка да се счита за централно симетрично. Това означава, че за всяко разстояние R от галактичния център има фиксирани, характерни скорости $V(R)$ (линейна) и $\Omega(R)$ (ъглова), с които звездите се движат по кръгови орбити. При отделните звезди некръговите компоненти на скоростта (отклонението от $V(R)$) обикновено са много малки в сравнение с $V(R)$.

Нека от Слънцето се наблюдава звезда на галактични координати $(l, 0)$ и разстояние от наблюдателя d , при което ъгловата ѝ скорост е Ω . Слънцето е на разстояние R_0 от галактичния център, където ъгловата скорост е Ω_0 .

- А) Покажете, че тангенциалната компонента за наблюдаемата от Слънцето скорост на звездата се определя чрез

$$V_t = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega d.$$

Положителната посока за тангенциалната скорост е по направлението на нарастване на галактичната дължина. Гледано от северния галактичен полюс, въртенето на Млечния път е по часовниковата стрелка. [2 т.]

При близки до Слънцето звезди величината $(\Omega - \Omega_0)$ може да се разглежда като

$$\Omega - \Omega_0 = (R - R_0) \left. \frac{\Delta\Omega}{\Delta R} \right|_{R_0},$$

където отношението $\left. \frac{\Delta\Omega}{\Delta R} \right|_{R_0}$ описва как се изменя функцията $\Omega(R)$ при промяна на R около $R = R_0$.

Например ако се окаже, че при отдалечаване с $\Delta R = 1$ pc от галактичния център, местното $\Omega(R)$ ще нарасне с 10^{-16} rad/s, записваме $\left. \frac{\Delta\Omega}{\Delta R} \right|_{R_0} = \frac{10^{-16} \text{ rad/s}}{1 \text{ pc}} = 10^{-16} \frac{\text{rad}}{\text{s} \cdot \text{pc}}$.

Константите

$$A = -\frac{1}{2} R_0 \left. \frac{\Delta\Omega}{\Delta R} \right|_{R_0}, \quad B = -\frac{1}{2} R_0 \left. \frac{\Delta\Omega}{\Delta R} \right|_{R_0} - \Omega_0$$

са въведени от Ян Оорт през 1927 г. като параметри, даващи информация за въртенето на Млечния път в слънчевата околност. Те могат да се определят само по наблюдения на близки звезди, което заобикаля ограниченията на междувъзвездното поглъщане във видимия диапазон.

- Б) Намерете приближен израз за тангенциалната компонента V_t в зависимост само от l, d, A, B при близки до Слънцето звезди ($d \ll R_0$). [3 т.]

В таблицата са представени средните стойности за собственото движение на звезди в слънчевата околност при различни галактични дължини. Галактичните ширини на изучаваните звезди са малки, а собственото движение се измерва относно далечни ориентири, например квазари.

l [deg]	μ_l [km s ⁻¹ kpc ⁻¹]	l [deg]	μ_l [km s ⁻¹ kpc ⁻¹]	l [deg]	μ_l [km s ⁻¹ kpc ⁻¹]
20.0	-2.7	140.0	-13.5	260.0	-24.2
60.0	-20.2	180.0	1.6	300.0	-23.4
100.0	-28.7	220.0	-6.8	340.0	-6.2

- В) Постройте по данните подходяща линеаризирана графика и оценете константите на Оорт A и B в мерни единици km s⁻¹ kpc⁻¹. [6 т.]

Доказва се, че

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{V_0}{R_0} - \left. \frac{\Delta V}{\Delta R} \right|_{R_0} \right), \quad B = -\frac{1}{2} \left(\frac{V_0}{R_0} + \left. \frac{\Delta V}{\Delta R} \right|_{R_0} \right),$$

където отношението $\left. \frac{\Delta V}{\Delta R} \right|_{R_0}$ описва как се изменя функцията $V(R)$ при промяна на R около $R = R_0$.

- Г) За колко години прави Слънцето една пълна обиколка около центъра на Млечния път? Проверете кой от дадените три модела за въртенето на Млечния път около R_0 отговаря най-точно на наблюденията:

- Галактиката се върти с еднаква за всички R ъглова скорост Ω (като твърдо тяло);
- Галактиката се върти с еднаква за всички R линейна скорост V ;
- Галактиката се върти по зависимост $V \propto 1/\sqrt{R}$ (следствие от механиката при предположение, че почти всичката маса в галактиката е концентрирана в $R < R_0$).

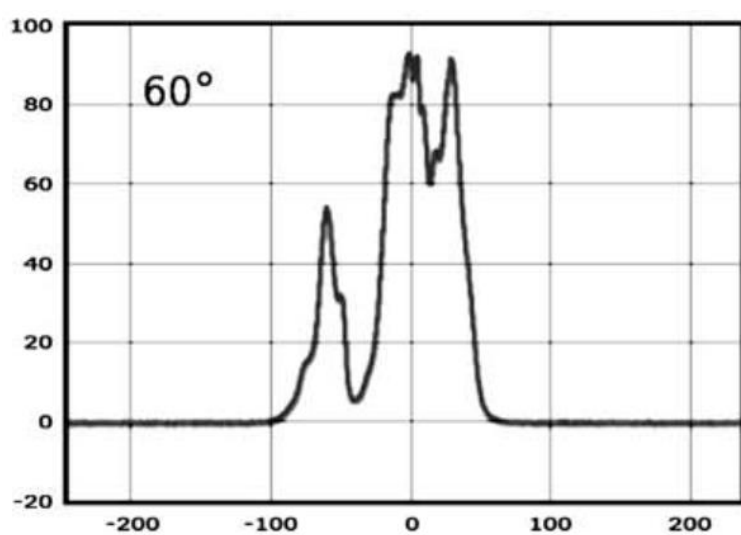
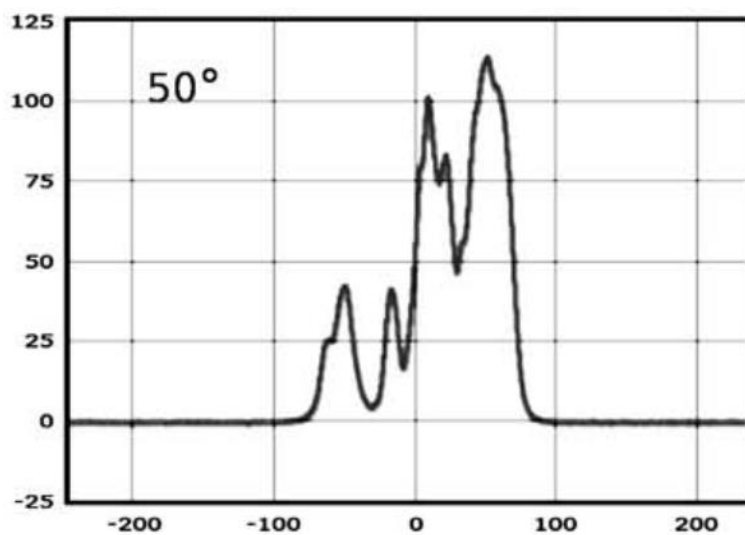
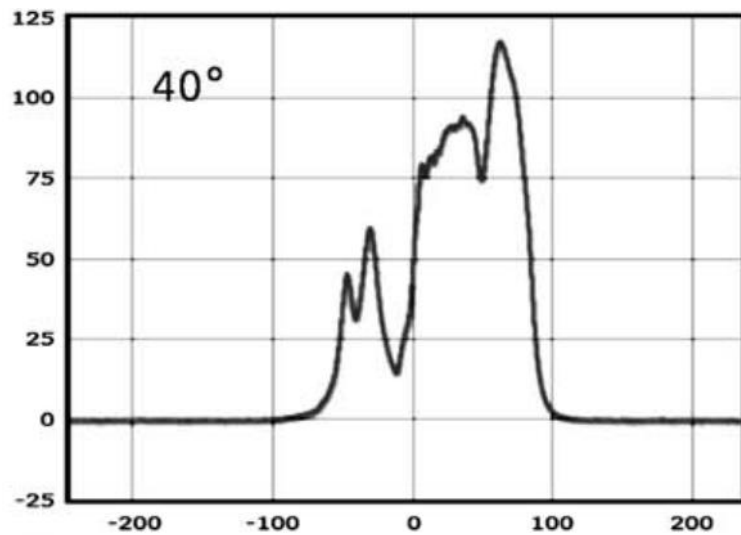
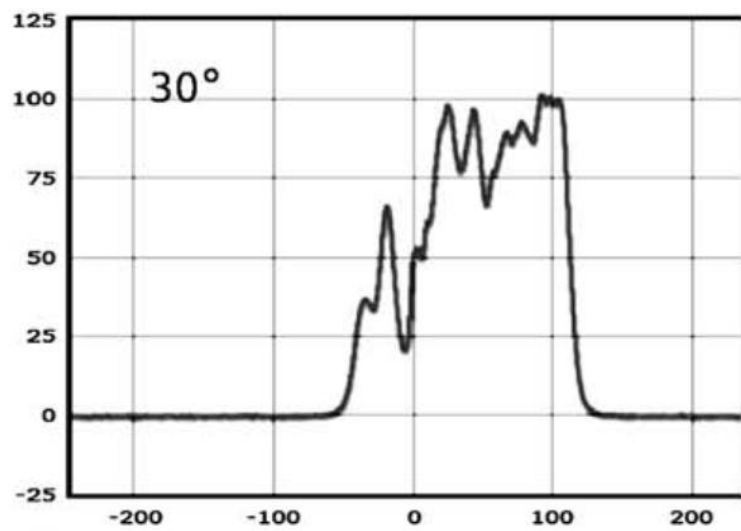
При този модел е изпълнено $\left. \frac{\Delta V}{\Delta R} \right|_{R_0} = -\frac{1}{2} \frac{V_0}{R_0}$. [3 т.]

Оказва се, че моделът, поддържан от числените стойности на константите на Оорт, добре описва въртенето на галактиката в целия интервал $R > 1$ крс.

Подобно на звездите, движението на неутралния водороден газ в диска на Млечния път става с характерната кръгова скорост $V(R)$. При такива водородни (HI) облаци йонизация не се наблюдава, което не позволява изследване на стандартните спектрални серии на водорода. В спектъра на неутралния водород обаче се наблюдава т. нар. 21 см линия, произходът на която е от различно естество. Млечният път е на практика прозрачен в радиодиапазона, тоест видът на тази водородна линия при спектрални наблюдения на фиксирана галактична дължина се определя от HI регионите по протежение на целия зрителен лъч.

Разполагате с профили на разширената 21 см линия при наблюдения на различна галактична дължина в диска на Млечния път. По абсцисата в km/s е дадена лъчевата скорост, определена от червеното отместване, съответстващо на отклонението от лабораторната дължина на вълната. По ординатата е даден интензитетът на линията в произволни мерни единици.

- Д) Използвайки подходящ модел, получите усреднена стойност за скоростта на движение на Слънцето в галактиката. Намерете разстоянието до галактичния център. [6 т.]



Профили на 21 см линия за няколко галактични дължини.

Решение:

а) На дадения чертеж въвеждаме ъгъла β , при което тангенциалната скорост ще се задава с

$$V_\tau = V \cos \beta - V_0 \cos l,$$

$$V_\tau = \Omega R \cos \beta - \Omega_0 R_0 \cos l.$$

Същевременно, в правоъгълния триъгълник с хипотенуза R_0 катетът при l се изразява по два начина:

$$R_0 \cos l = R \cos \beta + d.$$

Затова

$$V_\tau = \Omega(R_0 \cos l - d) - \Omega_0 R_0 \cos l,$$

$$V_\tau = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - \Omega d \blacksquare.$$

б) Преобразуваме израза за тангенциалната скорост така:

$$V_\tau = (\Omega - \Omega_0)R_0 \cos l - (\Omega_0 + (\Omega - \Omega_0))d$$

$$V_\tau = (\Omega - \Omega_0)(R_0 \cos l - d) - \Omega_0 d$$

При близки звезди $d \ll R_0$, тоест

$$V_\tau = (\Omega - \Omega_0)(R_0 \cos l) - \Omega_0 d,$$

или директно може да вземем $\Omega \approx \Omega_0$. Сега използваме величината $\Omega - \Omega_0$ по дадения в условието начин:

$$V_\tau = R_0(R - R_0) \left. \frac{\Delta \Omega}{\Delta R} \right|_{R_0} \cos l - \Omega_0 d.$$

Целим да елиминираме неизвестното R . При близки звезди можем да използваме приближението $R \approx R_0 - d \cos l$, което следва естествено от геометрията на триъгълник при $d \ll R$, а може и да се изведе от косинусовата теорема. Следва

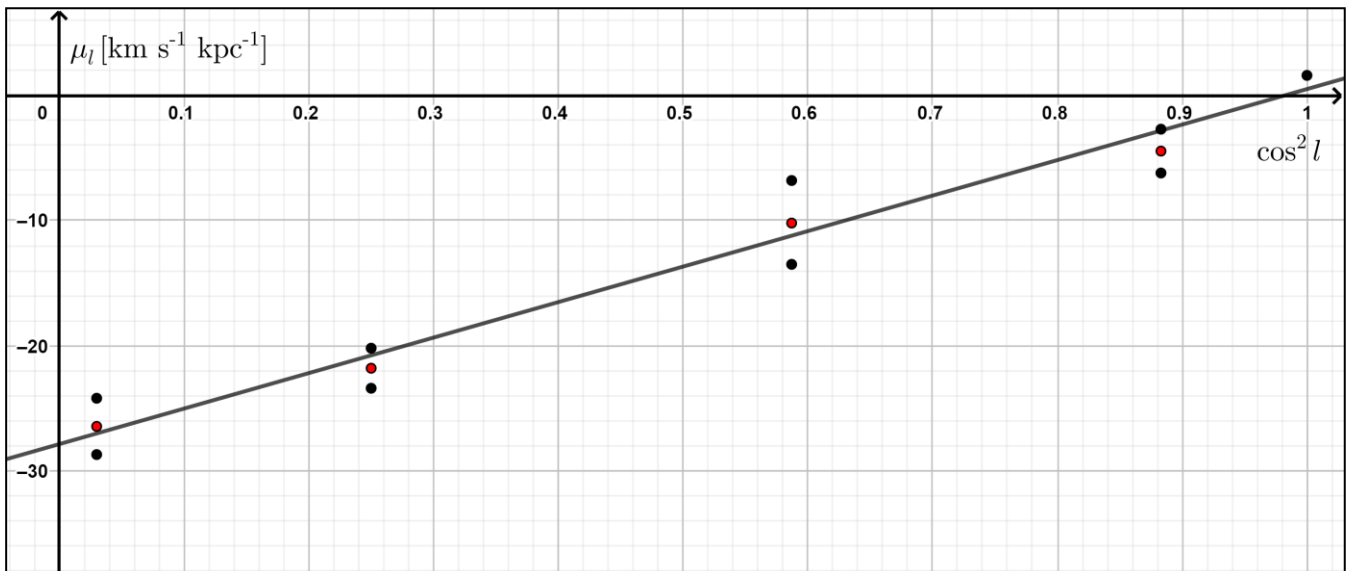
$$V_\tau = -R_0 d \left. \frac{\Delta \Omega}{\Delta R} \right|_{R_0} \cos^2 l - \Omega_0 d,$$

$$V_\tau = 2Ad \cos^2 l - (A - B)d \blacksquare^1$$

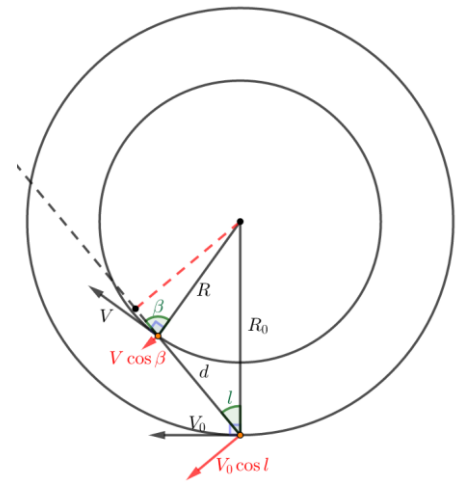
в) За собственото движение на дадените звезди имаме

$$\mu_l = \frac{V_\tau}{d} = 2A \cos^2 l + (B - A).$$

Това означава, че графичната зависимост на μ_l от $\cos^2 l$ следва да е права линия с наклон $2A$ и свободен член $B - A$. Начертаваме графика по съответните данни, усреднявайки данните, където това е приложимо (с червено).



За наклона на графиката намираме $2A = 28.4 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, а свободния член намираме по пресечната точка с оста y : $B - A = -27.8 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. С това получаваме



$$A = 14.2 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}, \quad B = -13.6 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}.$$

г) По дадените изрази за A и B може да намерим за ъгловата скорост на Слънцето $\Omega_0 = V_0/R_0$, че

$$\Omega_0 = A - B.$$

Така периодът за обиколка на Слънцето около галактичния център е $T = \frac{2\pi}{A-B} = 220 \times 10^6 \text{ yr}$.
Може аналогично да намерим и

$$\left. \frac{\Delta V}{\Delta R} \right|_{R_0} = -(A + B) = 0.6 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}.$$

Още отсега е видимо, че за голямо разстояние като 1 крс промяната в кръговата скорост е много малка. Нека проверим какво предвиждат за $\left. \frac{\Delta V}{\Delta R} \right|_{R_0}$ трите модела.

При въртене с еднаква ъглова скорост Ω , кръговата скорост на разстояние R е ΩR , а при увеличаването на това разстояние с ΔR , кръговата скорост става с $\Omega(R + \Delta R)$. Промяната в кръговата скорост за малко преместване ΔR ще е $\Delta V = \Omega(R + \Delta R) - \Omega R = \Omega \Delta R$. Следователно

$$\frac{\Delta V}{\Delta R} = \Omega \Rightarrow \left. \frac{\Delta V}{\Delta R} \right|_{R_0} = \Omega_0 = A - B = 27.8 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}.$$

При въртене по зависимост $V \propto 1/\sqrt{R}$ е дадено по условие

$$\left. \frac{\Delta V}{\Delta R} \right|_{R_0} = -\frac{1}{2} \frac{V_0}{R_0} = -\frac{1}{2} \Omega_0 = \frac{1}{2} (B - A) = -13.9 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}.^2$$

При въртене с еднаква линейна скорост, няма промяна в стойността й с промяна на разстоянието:

$$\left. \frac{\Delta V}{\Delta R} \right|_{R_0} = 0.$$

Вторият модел отговаря на наблюденията най-добре.

д) В тази част на задачата приемаме, че въртенето на галактиката за $R > 1$ крс става с постоянна скорост. Слънцето попада в този диапазон, така че скоростта под въпрос се явява V_0 . Лъчевата скорост за звезда с галактична дължина l и разстояние до центъра R се задава с (вж. чертежа)

$$V_r = V_0 \sin \beta - V_0 \sin l.$$

По правоъгълния триъгълник на чертежа откриваме $R \sin \beta = R_0 \sin l$, тоест

$$V_r = V_0 \left(\frac{R_0}{R} - 1 \right) \sin l.$$

Когато наблюдаваме водородните облаци на дължина l , ние виждаме съвкупност от обекти с различни лъчеви скорости. При всеки от облаците 21 см линия има различно червено отместване в зависимост от V_r и в резултат линията изглежда разширена. Десният край на разширената линия ще се поражда от облаците по зрителния лъч, които имат най-висока лъчева скорост. Това са тези облаци, за които R е най-малко, а минималната стойност на R по зрителния лъч е $R = R_0 \sin l$; така

$$V_{r,\max} = V_0 (1 - \sin l).$$

За всеки от дадените спектри измерваме $V_{r,\max}$ и намираме съответния резултат за V_0 :

l [deg]	30	40	50	60
$V_{r,\max}$ [km/s]	103	65	52	30
V_0 [km/s]	207	183	214	224

Като средна стойност³ получаваме $V_0 = 207 \text{ km/s}$. За разстоянието до галактичния център имаме

$$R_0 = \frac{V_0}{\Omega_0} = 7.4 \text{ kpc}.$$

¹ Друга възможна форма на зависимостта използва връзката $\cos^2 l = \frac{1+\cos 2l}{2}$. Тогава намираме

$$V_{\tau} = Ad \cos(2l) + Bd.$$

² Това несъответствие с кинематичните наблюдателни резултати показва, че масата в галактиката не би следвало да е концентрирана към галактичния център. От друга страна, информацията ни за разпределението на масата в Млечния път от фотометрични наблюдения на звезди сочи именно към обратното! Това несъответствие може да се обясни с наличието на недостъпен за фотометрични наблюдения вид материя в периферията на галактиките. Това наричаме тъмна материя.

³ При резултата ни има известно отклонение от определената по най-нови *астрометрични* данни (Eilers et al. 2019) стойност за кръговата скорост, $V_0 = 229$ km/s. Това се дължи на ограниченията в точността на използвания от нас метод, на детайлите в разпределението на HI облаците в Млечния път и на некръговите компоненти в скоростта на водородния газ. При работата си не отчетохме и некръговата компонента в движението на самото Слънце.